Divisibilité

I- Multiples et diviseurs d'un nombre entier

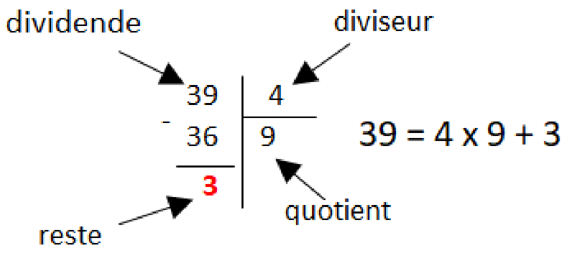
1) Division euclidienne

Définition

Soient a et b deux nombres entiers, avec $b \neq 0$.
Effectuer la **division euclidienne** de a par b, c'est trouver deux nombres entiers q et r tels que $a = b \times q + r$ avec $r < b$.

a s'appelle le dividende, b le diviseur , q le quotient et r le reste.

Exemple



2) Multiples et diviseurs

Définitions

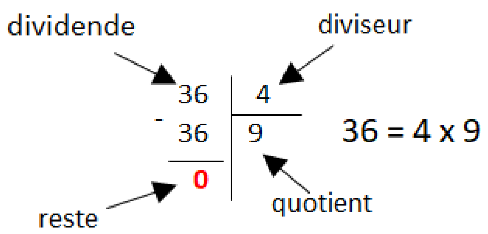
a et b désignent des nombres entiers avec ($b \neq 0$).

a est **un multiple** de b signifie qu'il existe un entier q tel que $a = b \times q$.

q est le quotient de la division euclidienne de a par b dont le reste est nul.

On dit :
- b est un diviseur de a
- b divise a.
- a est divisible par b
- a est un multiple de b

Exemple



36 est divisible par 4 et par 9.
36 est **un multiple** de 4 et de 9.
4 et 9 sont **des diviseurs** de 36.
4 divise 36.

Remarques

- On ne peut jamais diviser par le nombre 0.
- Tout entier naturel non nul est divisible par lui-même et par 1.

3) Critères de divisibilité

Pour déterminer les diviseurs d'un nombre entier, on peut utiliser les critères de divisibilité.

Propriétés

Propriété	Exemple
Si un nombre entier a son chiffre des unités égal à 0 , 2 , 4 , 6 ou 8 alors il est **divisible par 2**.	218 , 104 , 28 sont des nombres divisibles par 2
Si la somme des chiffres d'un nombre entier est divisible par 3 alors ce nombre est **divisible par 3**	129 : 1+2+9 = 12, 12 est divisible par 3 alors 129 est divisible par.
Si un nombre entier a son chiffre des unités égal à 0 ou 5 alors il est **divisible par 5**.	55 , 15 , 200 , 305 sont des nombres divisibles par 5.
Si la somme des chiffres d'un nombre entier est divisible par 9 alors ce nombre est **divisible par 9**	918 : 9+1+8=18, 18 est divisible par 9 alors 918 est divisible par 9
Si un nombre entier a son chiffre des unités égal à 0 alors il est **divisible par 10**.	420 , 1 800 , 910 sont des nombres divisibles par 10.

II- Reconnaître un nombre premier

Définition

Un nombre premier est un nombre entier naturel qui admet exactement deux diviseurs : 1 et lui-même.

Exemples

- 14 n'est pas un nombre premier car il est divisible par 2.
- 11 est un nombre premier car il n'est divisible que par 1 et lui-même.

Remarques

- 1 n'est pas un nombre premier car il n'admet qu'un seul diviseur : lui-même.
- 2 est le seul nombre premier pair.
- 0 n'est pas un nombre premier car il admet une infinité de diviseurs.

Voici la liste des nombres premiers inférieurs à 30 **: 2 ; 3 ; 5 ; 7 ; 11 ; 13 ; 17 ; 19 ; 23 et 29.**

Remarque : Il existe une infinité de nombres premiers.

III- Décomposition en produit de facteurs premiers

Propriété

Tout nombre entier naturel peut s'écrire comme étant le produit de plusieurs facteurs premiers.

Exemple On cherche à décomposer 360 en produits de facteurs premiers

Méthode : Pour le faire, il est important de bien connaître le début de la liste des nombres premiers : 2, 3, 5, 7, 11, …

On cherche le plus petit nombre premier qui divise 260. On divise 260 par ce nombre premier et si le quotient obtenu est différent de 1, on recommence jusqu'à obtenir un quotient égal à 1.

$$\begin{array}{r|l} 260 & 2 \\ 130 & 2 \\ 65 & 5 \\ 13 & 13 \\ \mathbf{1} & \end{array}$$

$260 \div \mathbf{2} = 130$

$130 \div \mathbf{2} = 65$

$65 \div \mathbf{5} = 13$

$13 \div \mathbf{13} = 1$

$$\begin{aligned} 260 &= \mathbf{2} \times 130 \\ &= \mathbf{2} \times \mathbf{2} \times 65 \\ &= \mathbf{2} \times 2 \times \mathbf{5} \times \mathbf{13} \end{aligned}$$

260 = 2 x 2 x 5 x 13