Nombres rationnels
Comparaison, addition et soustraction

I- Déterminer les diviseurs d'un nombre entier

1) Division euclidienne

Définition

Effectuer la division euclidienne d'un nombre entier a (**le dividende**) par un nombre b (**le diviseur**) différent de 0, c'est trouver deux nombres entiers, **le quotient** q et **le reste** r tels que :

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{q} + \boldsymbol{r} \text{ avec } 0 \leq r < b.$$

Exemple

La division euclidienne de 336 par 5 est :

$$\begin{array}{rr|ll} \text{dividende} \rightarrow & 336 & 5 & \leftarrow \text{diviseur} \\ \cline{3-3} & -30 & 67 & \\ & 36 & & \nwarrow \\ & -35 & & \text{quotient} \\ \text{reste} \rightarrow & 1 & & \end{array}$$

$336 = 5 \times 67 + 1$ avec $1 < 5$

Définition

Soient a et b deux nombres entiers naturels avec $b \neq 0$.

Lorsque la division euclidienne de a par b donne un reste nul, on a $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{q}$, où $\boldsymbol{q}$ est un entier naturel.

On dit que :

- a est un multiple de b.
- a est divisible par b.
- b est un diviseur de a.

Exemple

$$\begin{array}{rr|l} & 36 & 9 \\ \cline{3-3} & -\,36 & 4 \\ \cline{2-2} \text{Le reste est nul} \rightarrow & 0 & \end{array}$$

$36 = 9 \times 4$

On dit que :

- 36 est **un multiple** de 9.
- 36 est **divisible** par 9.
- 9 est **un diviseur** de 36

Remarque : Le reste de la division euclidienne de 36 par 4 est aussi égal à 0. Donc 36 est aussi multiple de 4 et 4 est un diviseur de 36.

2) Critères de divisibilité

	Règle	Exemple
Divisibilité par 2	Un nombre est divisible par 2 si son dernier chiffre est pair.	*4 24 est divisible par 2 car 4 est pair.*
Divisibilité par 3	Un nombre est divisible par 3 si la somme de ses chiffres est un multiple de 3.	*138 est divisible par3 car 1+3+8=12 et 12 est un multiple de 3.*
Divisibilité par 5	Un nombre est divisible par 5 si son chiffre des unités est 0 ou 5.	***75** et **130** sont divisibles par 5.*
Divisibilité par 9	Un nombre est divisible par 9 si la somme de ses chiffres est un multiple de 9.	*288 est divisible par 9 car 2+8+8=18 et 18 est un multiple de 9.*
Divisibilité par 10	Un nombre est divisible par 10 si son chiffre des unités est égal à 0.	*80 est divisible par 10 car son chiffre des unités est 0.*

3) Nombres premiers

Définition

Un nombre premier est un nombre entier qui admet exactement deux diviseurs : 1 et lui-même.

Les nombres premiers inférieurs à 30 : 2 ; 3 ; 5 ; 7 ; 11 ; 13 ; 17 ; 19 ; 23 et 29.

Exemples :

12 n'est pas un nombre premier car il est divisible par 2.
1 n'est pas un nombre premier car il admet un unique diviseur : lui-même.
0 n'est pas un nombre premier car il possède une infinité de diviseurs non nuls

Propriété

Tout nombre entier naturel supérieur ou égal à 2 et non premier peut s'écrire comme un produit de facteurs premiers.

Exemples :

$210 = 2 \times 3 \times 5 \times 7$
$165 = 3 \times 5 \times 11$

4) Décomposer un nombre en produits de facteurs premiers

Exemple : On veut écrire 420 en produits de facteurs premiers.
Méthode : On cherche le plus petit nombre premier qui divise 420. On divise 420 par ce nombre premier et si le quotient obtenu est différent de 1, on recommence jusqu'à obtenir un quotient égal à 1.

420	*2* ←	*420 est divisible par 2 et le quotient est égal à 210.*
210	*2* ←	*210 est divisible par 2 et le quotient est égal à 105.*
105	*3* ←	*105 est divisible par 3 et le quotient est 35.*
35	*5* ←	*35 est divisible par 5 et le quotient est 7*
7	*7* ←	*7 est divisible par 7 et le quotient est 1.*
1		

La décomposition de 420 en facteurs premiers est :

$$420 = 2 \times 2 \times 3 \times 5 \times 7$$

II- Nombres rationnels

1) Reconnaître un nombre décimal ou rationnel

Définitions

Soient a et b deux nombres relatifs avec $b \neq 0$.

- Le quotient de a par b est le nombre multiplié par b, donne a.

On le note $\frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}}$ ou $\boldsymbol{a} \div \boldsymbol{b}$.

- Si a et b sont des entiers, on dit que $\frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}}$ est **une fraction**.

dividende *numérateur*

$$a \div b = \frac{a}{b}$$

diviseur *dénominateur*

Exemples :

Le quotient de 7 par 9 est $\frac{7}{9}$. $\frac{7}{9} \times 9 = 7.$

Dans la fraction $\frac{7}{9}$, 7 est le numérateur et 9 est le dénominateur.

Définition

Un nombre rationnel est un nombre qui peut s'écrire sous la forme d'une fraction.

Exemples

- $\frac{-3}{4}$ est un nombre rationnel.
- 4,5 est un nombre rationnel car $4{,}5 = \frac{9}{2}$.

Définitions

- **Une fraction décimale** est une fraction dont le dénominateur est égal à 10, 100, 1000……
- **Un nombre décimal** est un nombre qui peut s'écrire sous la forme d'une fraction décimale.

Exemples :

$\frac{7}{100}, \frac{13}{1\,000}$ sont des fractions décimales.

1,25 est un nombre décimal car $1{,}25 = \frac{125}{100}$.

Remarque

Un nombre rationnel peut être un nombre

- → *entier* *exemple:* $\frac{12}{3}=4$
- → *décimal* *exemple:* $12{,}5=\frac{25}{2}$
- → *ni entier ni décimal* *exemple:* $\frac{10}{3}\approx 3{,}333$

2) Comparaison de fractions

a) Fractions égales

Propriété

Un quotient ne change pas si on multiplie ou divise son numérateur et son dénominateur par un même nombre non nul.

Soient a, b et k des nombres relatifs avec $b \neq 0$ et $k \neq 0$.

$$\frac{a}{b}=\frac{a\times k}{b\times k} \quad et \quad \frac{a\div k}{b\div k}$$

Exemples :

$$\frac{-3{,}5}{5}=\frac{-3{,}5\times 2}{5\times 2}=\frac{-7}{10} \qquad \frac{14}{49}=\frac{14\div 7}{49\div 7}=\frac{2}{7}$$

Définition

Simplifier une fraction revient à trouver une fraction qui lui est égale avec un numérateur et un dénominateur plus petits.

Rendre **une fraction irréductible**, revient à trouver la fraction qui lui est égale avec le numérateur et le dénominateur les plus petits possibles.

Exemples :

$\frac{12}{36}=\frac{\cancel{2}\times 6}{\cancel{2}\times 18}=\frac{6}{18}.$ ⟵ On a simplifié la fraction $\frac{12}{36}$

$\frac{12}{36}=\frac{\cancel{2}\times \cancel{6}}{\cancel{2}\times \cancel{6}\times 3}=\frac{1}{3}$ ⟵ On a écrit la fraction $\frac{12}{36}$ sous la forme d'une fraction irréductible

Remarque : On peut décomposer 12 et 36 en produits de facteurs premiers :

$12=2\times2\times3$

$36=2\times2\times3\times3$

$$\begin{array}{r|l} 12 & 2 \\ 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 36 & 2 \\ 18 & 2 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

$$\frac{12}{36}=\frac{\cancel{2}\times\cancel{2}\times\cancel{3}}{\cancel{2}\times\cancel{2}\times\cancel{3}\times3}=\frac{1}{3}$$

b) Egalité des produits en croix

Propriété

Soient a, b, c et d des nombres relatifs tels que $b \neq 0$ et $d \neq 0$.

- Si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ alors $a \times d = b \times c$
- Si $a \times d = b \times c$ $alors$ $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

Application : les fractions $\frac{9}{25}$ et $\frac{45}{125}$ sont-elles égales ?

On calcule « les produits en croix » : $9 \times 125 = 1\,125$ et $25 \times 45 = 1\,125$.

On a : $9 \times 125 = 25 \times 45$ $alors$ $\frac{9}{25} = \frac{45}{25}$.

c) Comparer des fractions

Propriété

Soient a, b et k trois nombres relatifs avec $k > 0$.

Si $a < b$ alors $\frac{a}{k} < \frac{b}{k}$.

Application : Comparer $\frac{-2}{3}$ et $\frac{-3}{7}$.

On remarque que 21 est un multiple commun à 3 et 7. On peut donc écrire chaque fraction avec un dénominateur égal à 21 :

$$\frac{-2}{3} = \frac{-2 \times 7}{3 \times 7} = \frac{-14}{21} \qquad -14 < -9 \text{ } alors \text{ } \frac{-14}{21} < \frac{-9}{21}$$

$$\frac{-3}{7} = \frac{-3 \times 3}{7 \times 3} = \frac{-9}{21}$$

III- Additionner et soustraire des fractions

Propriété

Pour additionner (ou soustraire) deux fractions qui ont le même dénominateur :

- On additionne (ou soustrait) les numérateurs ;
- On garde le dénominateur commun.

Soient a, b et c désignent trois nombres relatifs avec $c \neq 0$.

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c} \qquad et \text{ } \frac{a}{c} - \frac{b}{c} = \frac{a-b}{c}$$

Exemples : $\frac{3}{7} + \frac{8}{7} = \frac{3+8}{7} = \frac{11}{7}$ $\qquad$ $\frac{5}{9} - \frac{1}{9} = \frac{4}{9}$

Pour additionner ou soustraire deux fractions qui n'ont pas le même dénominateur, on commence par les écrire avec le même dénominateur.

On veut calculer $\frac{10}{3} + \frac{-5}{4}$.

On remarque que 12 est un dénominateur commun à 3 et 4.

$$\frac{10}{3} + \frac{-5}{4} = \frac{10 \times 3}{3 \times 4} + \frac{-5 \times 3}{4 \times 3} = \frac{30}{12} + \frac{-15}{12} = \frac{30 + (-15)}{12} = \frac{15}{12}.$$

Une autre méthode