Fonction affine

I- Fonction linéaire et proportionnalité

1) Définition et propriétés

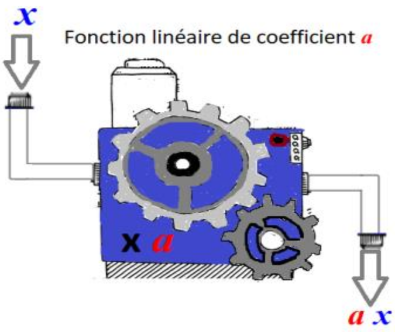
a) Définition

Soit a une constante.

La fonction linéaire f de coefficient $\boldsymbol{a}$ est la fonction qui, à un nombre x associe le produit de ce nombre par a,

On note cette fonction $\boldsymbol{f: x \to ax \text{ ou } f(x) = ax}$.

$\boldsymbol{a}$ est appelé **coefficient de linéarité** de la fonction f.



Exemple

La fonction linéaire de coefficient (-2) se note $f: x \to -2\,x \text{ ou } f(x) = -2x$.

b) Propriétés

Soit f une fonction linéaire de coefficient a.

$\boldsymbol{f}(0) = 0.$

Preuve : Soit $f(x) = ax. f(0) = a \times 0 = 0.$

Le coefficient d'une fonction linéaire est l'image de 1 par cette fonction, soit $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{f}(1)$.

Preuve : soit $f(x) = ax.$ $f(1) = a \times 1 = a.$

2) Lien avec la proportionnalité

Propriété

A toute situation de proportionnalité de coefficient a, on peut lui associer la fonction linéaire f, définie pour tout x par $f(x)= a\,x$.

On dit que cette situation de proportionnalité est modélisée par la fonction f.

Exemple1 : On considère le tableau de proportionnalité ci-dessous qui représente le prix de pommes achetées en fonction de la masse.

Masse (kg)	1	4	5	8
Prix (€)	1,80	7,20	9	14,40

La fonction $\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}) = \mathbf{1,80}\ \boldsymbol{x}$ est de la forme a x x *avec* $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{p}(1)$.

Cette fonction permet de modéliser le prix à payer en fonction de la masse de pommes achetées.

Dans cette situation, l'égalité $f(4) = 7{,}20$ signifie que le prix à payer pour 4 kg de pommes achetées est égal à 7.20 €.

3) Evolution en pourcentage

Propriétés

- Une **augmentation** de p % se traduit par une multiplication par $\left(\mathbf{1}+\frac{\boldsymbol{p}}{\mathbf{100}}\right)$.

Cette augmentation correspond à la fonction linéaire $\boldsymbol{f}: \boldsymbol{x} \mapsto \left(\mathbf{1}+\frac{\boldsymbol{p}}{\mathbf{100}}\right)$.

- Une **diminution** de p % se traduit par une multiplication par $\left(\mathbf{1}+\frac{\boldsymbol{p}}{\mathbf{100}}\right)$.

Cette diminution correspond à la fonction linéaire $\boldsymbol{f}: \boldsymbol{x} \mapsto \left(\mathbf{1}-\frac{\boldsymbol{p}}{\mathbf{100}}\right)$.

Exemples

Une augmentation de 10 % peut être modélisée par la fonction linéaire f définie par $f(x)=\left(1+\frac{10}{100}\right)x=1{,}10\,x$.

Une diminution de 25 % peut être modélisée par la fonction linéaire f définie par $f(x)=\left(1-\frac{25}{100}\right)x=0{,}75\,x$.

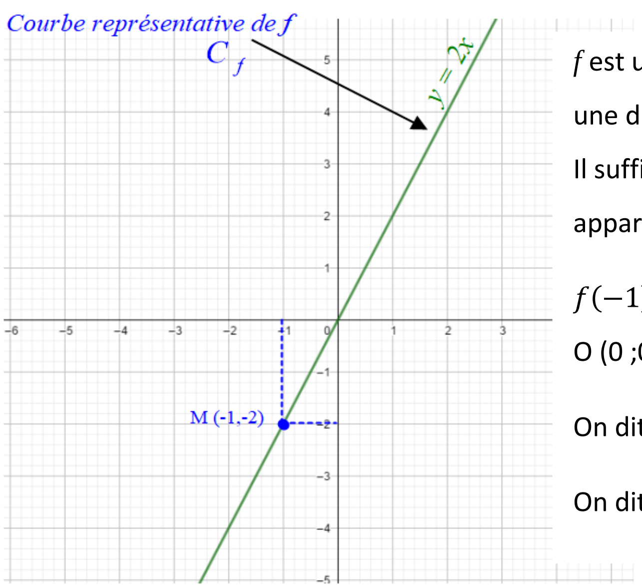
4) Représentation graphique d'une fonction linéaire

Propriété :

- Dans un repère, la représentation graphique d'une fonction linéaire de coefficient a est une droite (d) qui passe par l'origine.
- Réciproquement : dans un repère, toute droite qui passe par l'origine autre que la droite des ordonnées, est la représentation graphique d'une fonction linéaire.

$\boldsymbol{a}$ est appelé coefficient directeur de la droite (d).

Exemple : *Soit la fonction f telle que $f(x)=2x$.*



f est une fonction linéaire donc sa représentation graphique est une droite qui passe par l'origine O (0 ; 0) . Pour tracer cette droite, Il suffit de trouver les coordonnées d'un deuxième point appartenant à la courbe représentative de *f*.

$f(-1)=2\times(-1)=-2$ donc la droite passe par les deux points O (0 ;0) et M (-1 ; -2).

On dit que $y = 2x$ est une équation de la droite représentative de *f*.

On dit aussi que C_f est la courbe représentative de *f*.

5) Détermination de l'expression algébrique d'une fonction linéaire

a) Par le calcul

Exercice : Déterminer l'expression algébrique de la fonction linéaire g tel que $g(2) = -5$.

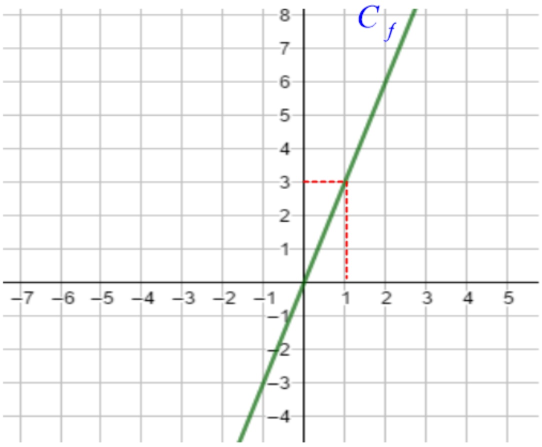
Réponse : On sait que g est une fonction linéaire donc $g(x) = a \times x$.

$g(2) = -5$ $alors$ $a \times 2 = -5$ $d'où$ $a = -\frac{5}{2}$

Conclusion $g(x) = -\frac{5}{2}x$.

b) Par le graphique

Exercice 1 : La courbe ci-dessous est la représentation graphique d'une fonction f. Déterminer son expression algébrique.



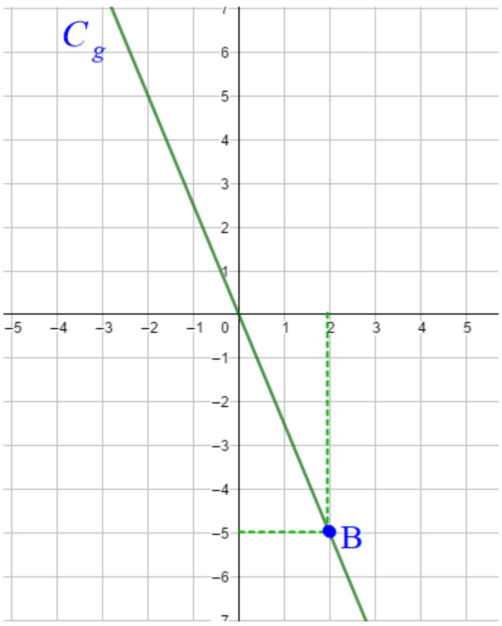
Réponse : La représentation graphique de la fonction f est une droite qui passe par l'origine donc $\boldsymbol{f(x) = a \times x}$.

On peut lire l'image de 1 est 3 donc $\boldsymbol{f(1) = 3 = a}$.

Conclusion $\boldsymbol{f(x) = 3x}$.

Dans certaines situations, on ne peut pas lire avec exactitude l'image de 1. Dans ce cas, on cherche un point dont les coordonnées sont bien lisibles.

Exemple :



On cherche à déterminer l'expression algébrique de la fonction g dont la représentation graphique est ci-contre.

D'après le graphique C_g est une droite qui passe par l'origine donc $\boldsymbol{g(x) = ax}$.

Le point B (2 ; -5) est un point de la droite. On en déduit que

$g(2) = -5$ $donc$ $a \times 2 = -5$ $d'où$ $a = -\frac{5}{2}$.

Conclusion : $g(x) = -\frac{5}{2}x$.

II- Fonction affine

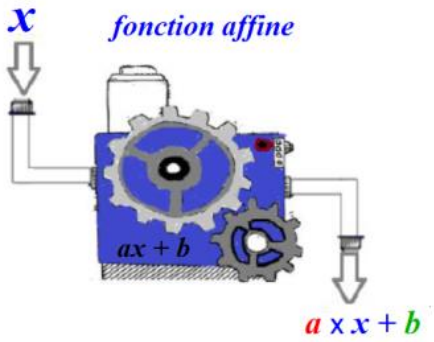
1) Définition et propriétés

Définition

On appelle fonction affine toute fonction qui, à tout nombre x , associe le nombre $ax + b$ où a et b sont des nombres « fixes ».

On note $\boldsymbol{f : x \mapsto ax + b}$ ou $\boldsymbol{f(x) = ax + b}$

Le nombre ***f(x)*** est appelé l'image de x par la fonction *f*.



Pour passer d'un nombre à son image, **on multiplie par a** , puis on **ajoute b.**

Exemples : La fonction qui, à chaque nombre x associe le nombre $-2x + 3$ est une fonction affine avec $a = -2$ et $b = 3$. On peut noter cette fonction : $f :\mapsto -2x + 3$ ou $f(x) = -2x + 3$.

On veut calculer l'image de 4 par la fonction *f* :

$f(4) = -2 \times 4 + 3 = -8 + 3 = -5$ $\quad donc -5\ est\ l'image\ de\ 4\ par\ la\ fonction\ f.$

Cas particuliers

Si $b = 0$

L'expression de *f* devient $f(x) = ax$. On retrouve alors une **fonction linéaire.**

Donc Toute fonction linéaire est aussi une fonction affine.

Si $a = 0$

L'expression de *f* devient $f(x) = b$. On obtient alors une **fonction constante.**

Donc Toute fonction constante est aussi une fonction affine.

Si $a = 0$ et $b = 0$

L'expression de *f* devient $f(x) = 0$. On obtient alors une **fonction nulle.**

Donc Toute fonction nulle est aussi une fonction affine.

2) Propriétés

Soit *f* une fonction affine telle que *f(x)* = *ax* + *b*.

$\boldsymbol{b = f(0)}$ Preuve : $f(0) = a \times 0 + b = b$

Pour tous nombres x_1 et x_2 tels que $x_1 \neq x_2$

$$\boldsymbol{a = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}}$$

Preuve : $f(x_1) - f(x_2) = a \times x_1 + b - a \times x_2 - b = ax_1 - ax_2 = a(x_1 - x_2)$

D'où $a = \frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}$

3) Représentation graphique d'une fonction affine

Propriété 1

- Dans un repère, si une fonction est affine alors sa représentation graphique est une droite qui n'est pas parallèle à l'axe des ordonnées.

- Réciproquement : Dans un repère, toute droite qui n'est pas parallèle à l'axe des ordonnées est la représentation graphique d'une fonction affine.

Propriété 2

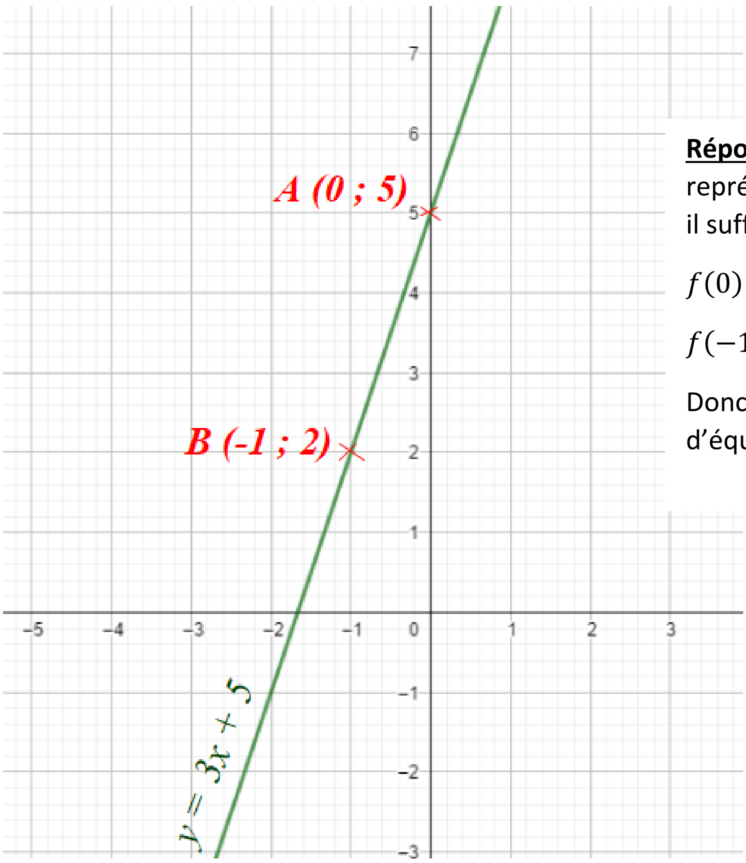
Soit f une fonction affine telle que $f(x) = ax + b$.

Dans un repère, la représentation graphique de f est une droite (d) qui passe par le point de coordonnées (0 ; b) .

a est appelé **coefficient directeur** de la droite (d) et b **l'ordonnée à l'origine** .

On dit que $y = ax + b$ est **une équation** de la droite (d).

Exemple : Représenter graphiquement la fonction f définie par f $: x \mapsto 3x + 5$.



Réponse : f est une fonction affine donc sa représentation est une droite. Pour tracer cette droite, il suffit de calculer les cordonnées de deux points.

$f(0) = 5$ On obtient un point A (0 ;5)

$f(-1) = 2$, On obtient un point B (-1 ; 2).

Donc la droite représentative de la fonction f et d'équation $y = 3x + 5$ est la droite (AB).