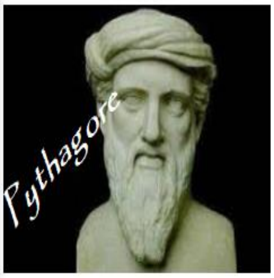
# Théorème de Pythagore

*Un peu d'histoire…*

***Pythagore*** *est un philosophe mathématicien, astronome et savant de la Grèce antique, né à Samos en Grèce vers 580 avant J.C et mort vers 495 avant J.C . Il fut élevé à Crotone, en Italie. Sa mère s'appelle Pythais et son père Mnesarchus. Pythagore a appris beaucoup de choses en voyageant en Syrie, Babylone, en Égypte et beaucoup d'autres endroits. Il fait progresser l'arithmétique et agrandit le monde des mathématiques. Il n'a pas laissé beaucoup d'écrit, donc nous ne savons pas grand-chose sur sa vie, que ce soit sur ses travaux ou sur sa vie privée. Des historiens ont des doutes concernant son existence et que son nom serait en lien avec une communauté de savants. Les causes de sa mort sont inconnues, certaines biographies décrivent une mort violente, d'autres parlent d'une mort dut à la famine et au désespoir. Malgré son nom, le théorème de Pythagore n'a pas été découvert ni créé par Pythagore mais par les chinois et les babyloniens 1000 ans avant. Pythagore l'a beaucoup amélioré et l'a rendu accessible dans le monde. Le théorème de Pythagore sert à mettre en relation les longueurs des côtés dans un triangle.*




## I- Calculer la longueur d'un côté d'un triangle rectangle

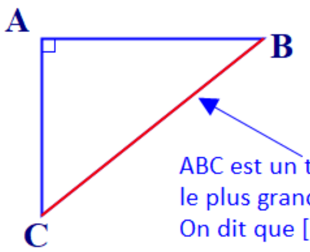
### 1- Vocabulaire

**Définition**

Dans un triangle rectangle, le côté opposé à l'angle droit est le plus grand des trois côtés.

On l'appelle l'**hypoténuse**.

**Exemple**




ABC est un triangle rectangle en A, [BC] est son côté le plus grand.
On dit que [BC] est l'**hypoténuse** du triangle ABC.

*Ce mot vient du latin hypotenusa, hupo- « sous », et teino « tendre ».*
*Ce terme pour désigner le côté du triangle « qui sous-tend » l'angle droit.*

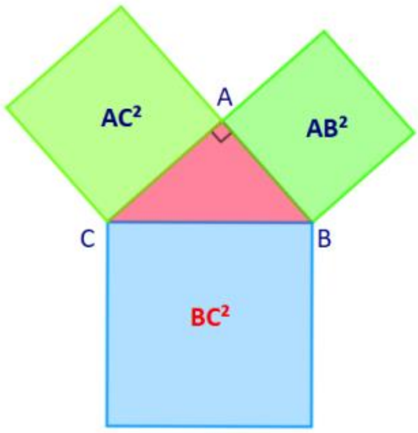
### 2- Théorème de Pythagore

Si un triangle est rectangle alors le carré de la longueur de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des longueurs des deux autres côtés.

Autrement dit, si un triangle ABC est rectangle en A, alors $\mathbf{BC^2 = AB^2 + AC^2}$.

Cette égalité est appelée l'égalité de Pythagore.

**Exemples**




Le triangle ABC est rectangle en A. On peut donc écrire l'égalité de Pythagore : **$BC^2 = AB^2 + BC^2$**

**Remarque :** Le théorème de Pythagore permet de calculer la longueur d'un côté connaissant les longueurs des deux autres côtés.

**Application :** On veut calculer MN.

On a MNP est un triangle rectangle en P.

D'après le théorème de Pythagore :

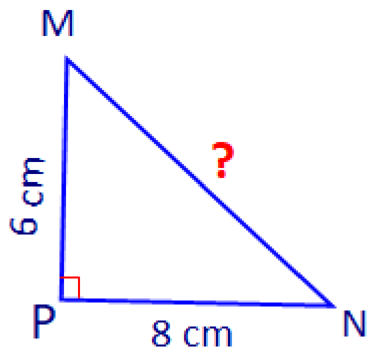
$MN^2 = PM^2 + PN^2$

$MN^2 = 6^2 + 8^2$

$MN^2 = 36 + 64$

$MN^2 = 100 \longleftarrow (MN \times MN = 100)$

$MN = 10\ cm \longleftarrow (10^2 = 10 \times 10 = 100)$




## 3- Calculer une racine carrée

**Définition**

Soit $a$ un **nombre positif.**

On appelle racine carrée de $a$, et on note $\sqrt{a}$ , le nombre positif dont le carré est égal au nombre $a$.

Le symbole $\sqrt{\ }$ s'appelle le radical.

**Exemples**

$\sqrt{100} = 10\ car\ 10 \times 10 = 10^2 = 100$ $\sqrt{49} = 7\ car\ 7^2 = 49$ $\sqrt{36} = 6\ car\ 6^2 = 36$

**Définition**

Quand on multiplie un nombre entier par lui-même, on obtient un carré parfait.
Autrement dit, un carré parfait est le carré d'un nombre entier.

**Exemple :** Voici la liste des 12 premiers carrés parfaits.

On calcule la racine carrée $\sqrt{\phantom{x}}$

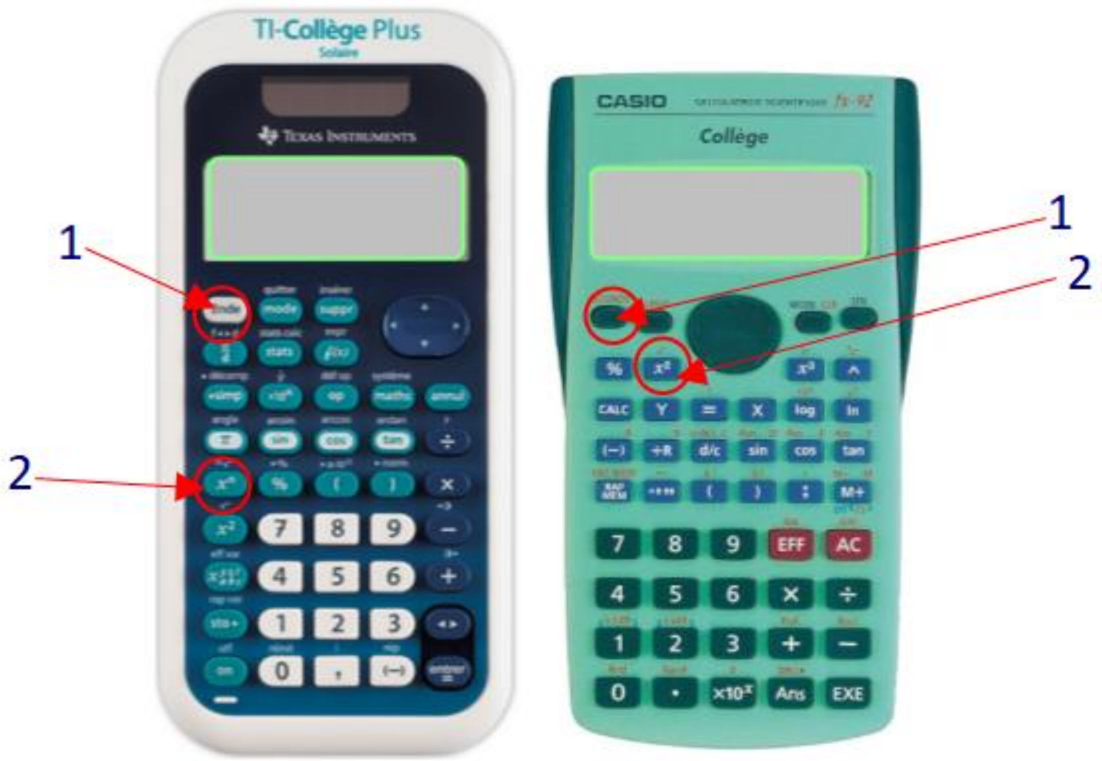
| | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
| 0 | 1 | 4 | 9 | 16 | 25 | 36 | 49 | 64 | 81 | 100 | 121 | 144 |

On calcule le carré $^2$

**Remarque :** Plusieurs racines carrées ne sont ni des nombres entiers ni des nombres rationnels. Dans ce cas on peut utiliser une calculatrice pour en trouver une valeur approchée.

**Exemples :**

$\sqrt{2} \approx 1{,}41$ $\sqrt{18} \approx 4{,}24$ $\sqrt{116} \approx 10{,}8$




**Remarque :** En appliquant le théorème de Pythagore, certaines longueurs qu'on cherche ne sont pas des valeurs entières, on utilise la racine carrée pour en trouver une valeur approchée.

**Exemple 1 :** Calculer DF.

On a EDF est un triangle rectangle en E.

D'après le théorème de Pythagore :

$DF^2 = EF^2 + ED^2$

$DF^2 = 4^2\ cm^2 + 5^2 cm^2$

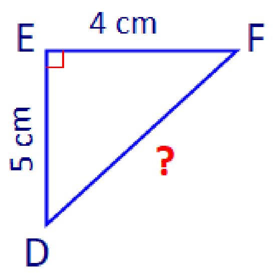
$DF^2 = 16\ cm^2 + 25 cm^2$

$DF^2 = 41\ cm^2$

Valeur exacte de DF

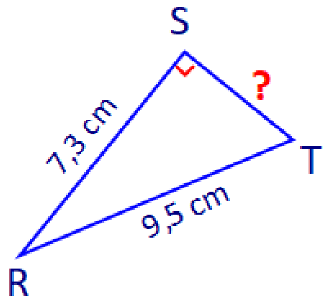
$DF = \sqrt{41}\ cm \approx 6{,}4\ cm$

Valeur approchée de DF



**Exemple 2**

On a RST est un triangle rectangle en S.




D'après le théorème de Pythagore :

$RT^2 = ST^2 + SR^2$

$ST^2 = RT^2 - SR^2$

$ST^2 = 9{,}5^2 cm^2 - 7{,}3^2 cm^2$

$ST^2 = 90{,}25\ cm^2 - 53{,}29 cm^2$

$ST^2 = 36{,}96\ \text{cm}^2$

$ST = \sqrt{36{,}96}\ cm \approx 6{,}08\ cm$

## II- Reconnaître si un triangle est rectangle

**Définition**

Quand on a une propriété qui s'écrit "*Si A alors B*", la réciproque serait "*Si B alors A*".

**Remarque :** Une réciproque peut être vraie ou fausse.

**Exemples :**

Réciproque vraie:

Si I est le milieu de [AB] (A) $\xrightarrow{\text{Sens direct}}$ I∈[AB] et IA = IB (B)

Si I∈[AB] et IA = IB (B) $\xrightarrow{\text{Réciproque}}$ I est le milieu de [AB] (A)

Réciproque fausse:

Si un quadrilatère est un carré (A) $\xrightarrow{\text{Sens direct}}$ Ce quadrilatère a quatre angles droits (B)

Si un quadrilatère a quatre angles droits (B) $\xrightarrow{\text{Réciproque}}$ Ce quadrilatère est un carré (A)

### Réciproque du théorème de Pythagore

Si dans un triangle, le carré de la longueur du côté le plus long est égal à la somme des carrés des longueurs des deux autres côtés, alors ce triangle est un triangle rectangle.

Autrement dit, si $BC^2 = AB^2 + AC^2$, alors ABC est rectangle en A.

Si ABC est un triangle rectangle $\xrightarrow{\text{Thérorème de Pythagore}}$ $BC^2 = AB^2 + AC^2$

Si $BC^2 = AB^2 + AC^2$ $\xrightarrow{\text{Réciproque du théorème de Pythagore}}$ ABC est un triangle rectangle

**Remarque :** La réciproque du théorème de Pythagore permet de démontrer qu'un triangle est rectangle.

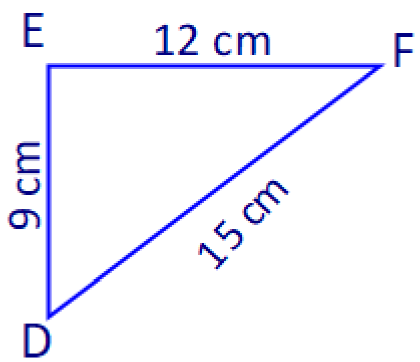
## Méthode pour démontrer qu'un triangle est rectangle ou pas

On considère ABC un triangle avec [BC] son côté le plus long.

- $Si\ BC^2 = AB^2 + AC^2$ *alors le triangle ABC est rectangle en A.*
- $Si\ BC^2 \neq AB^2 + AC^2$ *alors ABC n'est pas un triangle rectangle.*

## Applications

**Application 1 :** On considère la figure ci-dessous, le triangle EDF est-il rectangle ?




On a EDF est un triangle avec [DF] son plus grand côté.

On calcule séparément

$DF^2 = 15^2\ cm^2$ $\qquad EF^2 + ED^2 = 12^2 cm^2 + 9^2 cm^2$

$DF^2 = 225$ $\qquad EF^2 + ED^2 = 144\ cm^2 + 81 cm^2$

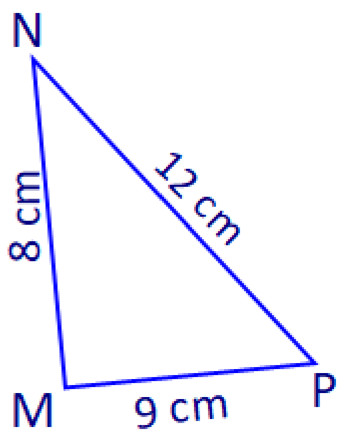
$EF^2 + ED^2 = 225$ cm²

On a donc, $DF^2 = EF^2 + ED^2$.

L'égalité de Pythagore est vérifiée alors le triangle EDF est rectangle en E.

*(On vient d'utiliser la réciproque du théorème de Pythago0re)*

**Application 2 :** On considère la figure ci-dessous, le triangle MNP est-il rectangle ?




On a MNP est un triangle avec [NP] son plus grand côté.

On calcule séparément

$NP^2 = 12^2$cm² $\qquad MP^2 + MN^2 = 9^2 cm^2 + 8^2 cm^2$

$NP^2 = 144$ cm² $\qquad MP^2 + MN^2 = 81 cm^2 + 64 cm^2$

$MP^2 + MN^2 = 145$ cm²

On a donc, $NP^2 \neq MP^2 + MN^2$.

L'égalité de Pythagore n'est pas vérifiée alors le triangle EDF n'est pas rectangle.

*Ce type de raisonnement est appelé la contraposée du théorème de Pythagore*