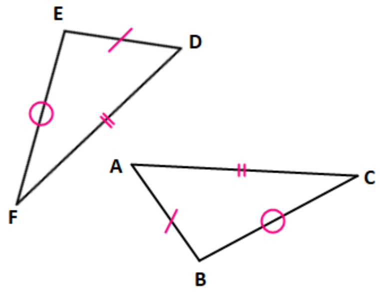
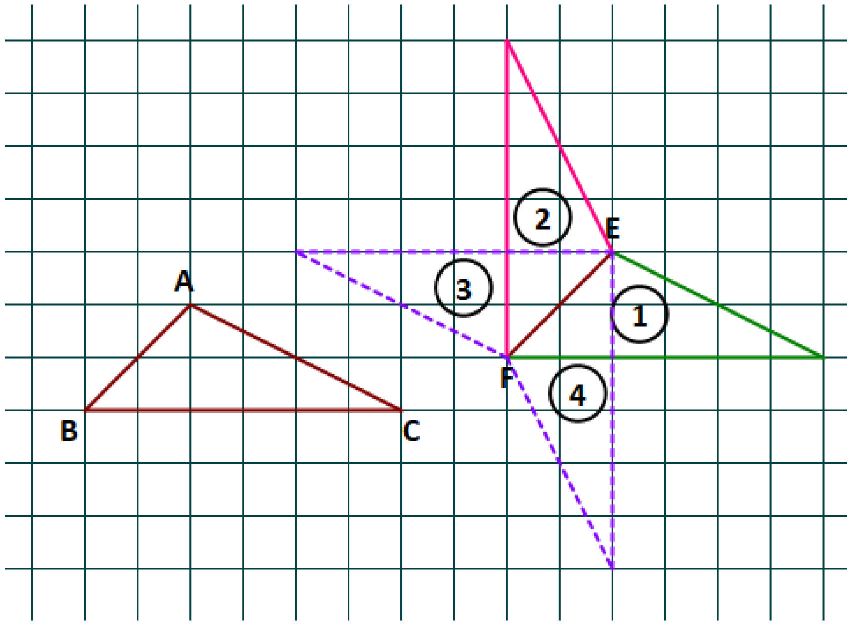
Correction – Triangles semblables

Exercice 1 : Compléter le tableau ci-dessous.

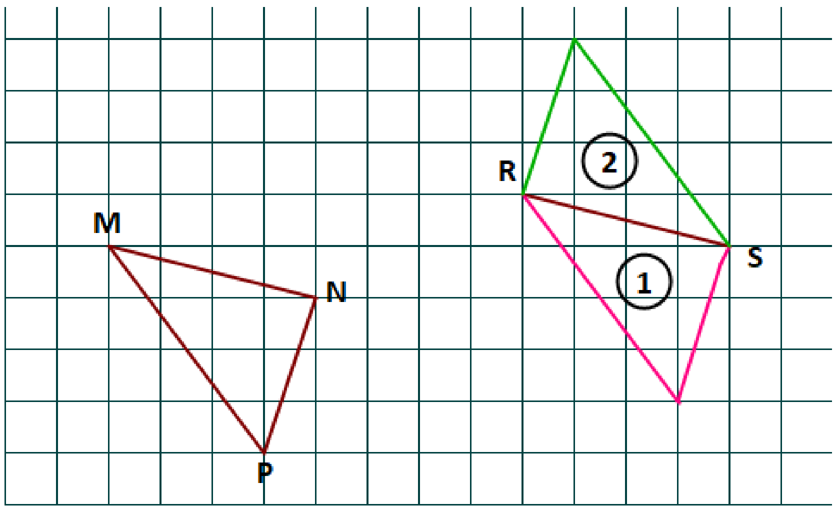
Sommet	Sommet homologue	Côté	Côté homologue	Angle	Angle homologue
A	**D**	[AB]	**[DE]**	$\widehat{ABC}$	$\widehat{DEF}$
B	**E**	[AC]	**[DF]**	$\widehat{ACB}$	$\widehat{DFE}$
C	**F**	[BC]	**[EF]**	$\widehat{BAC}$	$\widehat{EDF}$



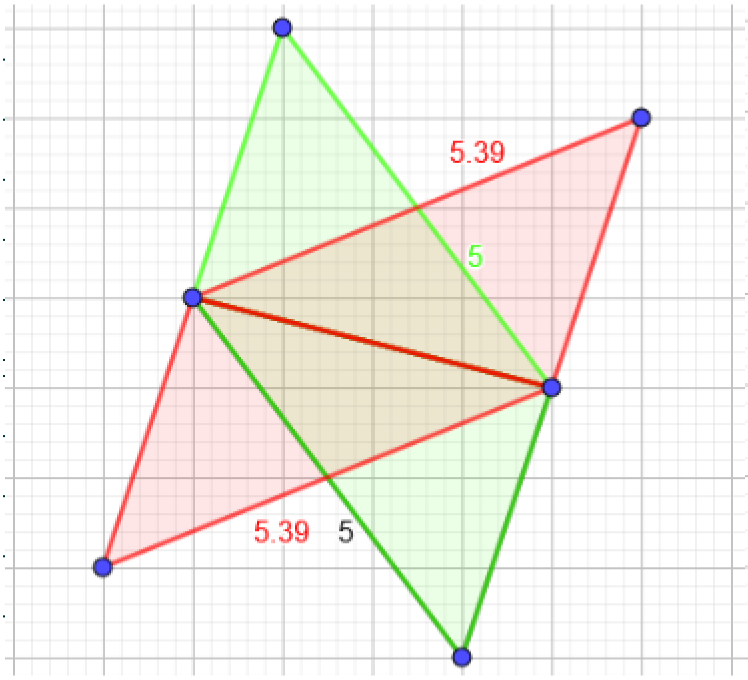
Exercice 2 : Construire deux triangles égaux à ABC qui ont [EF] pour côté.

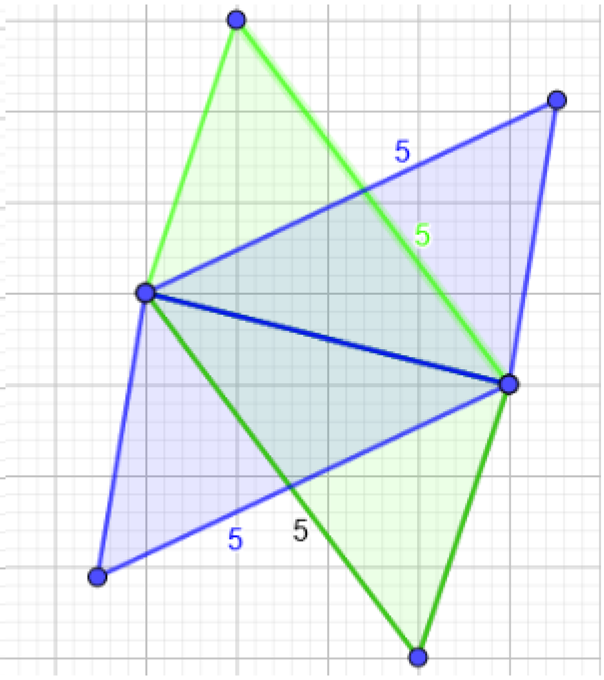


Exercice 3 : Construire deux triangles égaux à MNP qui ont [RS] pour côté.



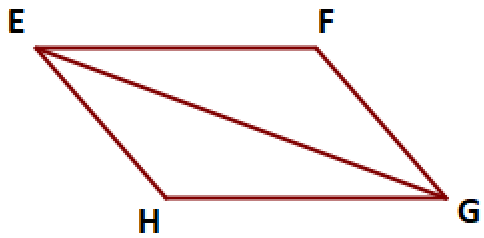
Attention : On ne peut tracer que deux triangles en utilisant le quadrillage. Voici une capture d'écran faite avec le logiciel GeoGebra qui montre que les triangles rouges ne sont pas égaux au triangle de départ. Nous pouvons tout de même construire deux triangles (en bleu) égaux au triangle MNP en utilisant la symétrie axiale d'axe (RS) et sans se baser sur le quadrillage, ce qui n'est pas demandé.





Exercice 4 : On considère un parallélogramme EFGH.

Montrer que EFG et EHG sont égaux.

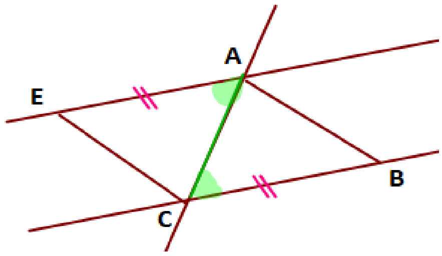


On sait que EFGH est un parallélogramme. Or un parallélogramme a ses côtés opposés de même longueur. On a donc :

EF = HG
EH = FG
[EG] est un côté commun aux deux triangles.
Les triangles EFG et EHG sont deux triangles qui ont leurs côtés deux à deux de même longueur alors ils sont égaux.

Exercice 5 : On considère la figure ci-contre fait à main levée. Les droites (AE) et (CB) sont parallèles et AE = BC.

Montrer que les triangles AEC et ABC sont égaux.



1ère méthode : A partir des angles alternes-internes :

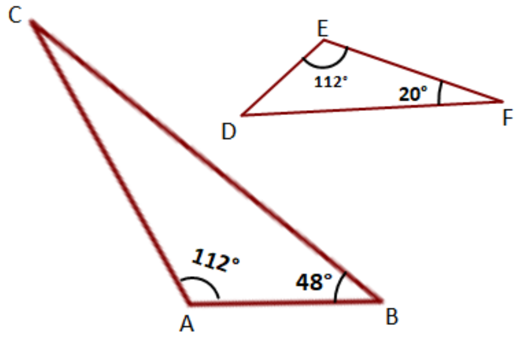
Les angles $\widehat{EAC}$ et $\widehat{ACB}$ sont deux angles alternes-internes formés par les droites parallèles (AE) et (BC) coupées par la sécante (AC) alors ces angles sont égaux.

On a donc $\begin{cases} AE = BC \\ \widehat{EAC} = \widehat{ACB} \\ [AC] \text{ un côté commun aux deux triangles} \end{cases}$ alors les triangles AEC et ABC sont égaux.

2ère méthode : A partir des propriétés du parallélogramme : Dans le quadrilatère ABCE, les côtés [AE] et [BC] sont de même longueur et parallèles alors ce quadrilatère est un parallélogramme. Or un parallélogramme a ses côtés opposés de même longueur. On en déduit que AB =EC. Comme [AC] est un côté commun aux triangles AEC et ABC alors les triangles AEC et ABC sont deux triangles dont leurs côtés sont deux à deux de même longueur, d'où ils sont égaux.

Exercice 6 :

a)



On sait que la somme des mesures des angles dans un triangle est égale à 180°. Pour montrer que deux triangles sont semblables, il suffit de montrer qu'ils possèdent deux angles deux à deux de même mesure.

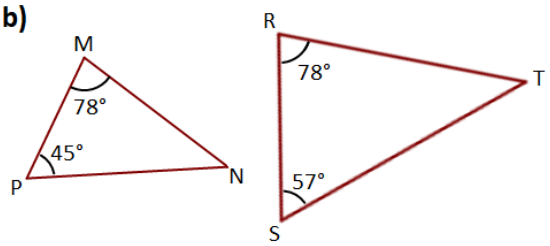
Dans le triangle EDF :

$$\widehat{EDF} = 180° - \left(\widehat{DEF} + \widehat{EFD}\right) = 180° - (112° + 20°) = 48°$$

On a $\widehat{BAC} = \widehat{DEF}$ *et* $\widehat{EDF} = \widehat{ABC}$ alors les triangles ABC et EDF sont semblables.

On peut procéder de la même manière en calculant l'angle $\widehat{ACB}$.

b)



On sait que la somme des mesures des angles dans un triangle est égale à 180°. Pour montrer que deux triangles sont semblables, il suffit de montrer qu'ils possèdent deux angles deux à deux de même mesure.

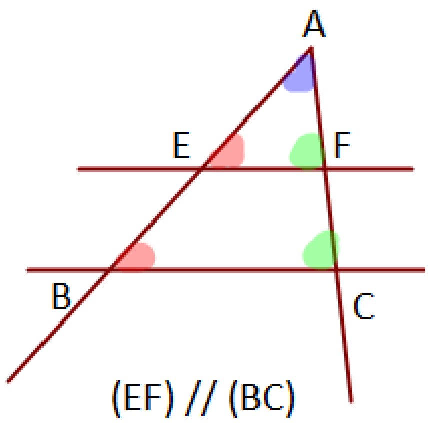
Dans le triangle RST :

$$\widehat{RTS} = 180° - \left(\widehat{SRT} + \widehat{RST}\right) = 180° - (78° + 57°) = 45°$$

On a $\widehat{SRT} = \widehat{PMN}$ *et* $\widehat{RTS} = \widehat{MPN}$ alors les triangles PMN et RST sont semblables.

On peut procéder de la même manière en calculant l'angle $\widehat{MNP}$.

Exercice 7 :



On a les angles $\widehat{AFE}$ et $\widehat{ACB}$ sont deux angles correspondants formés par les deux droites parallèles (EF) et (BC) coupées par la sécante (FC) alors les deux angles sont égaux : $\boldsymbol{\widehat{AFE} = \widehat{ACB}}$

De plus les triangles AEF et ABC ont l'angle de sommet A en commun.

Conclusion les triangles ABC et AEF sont semblables.

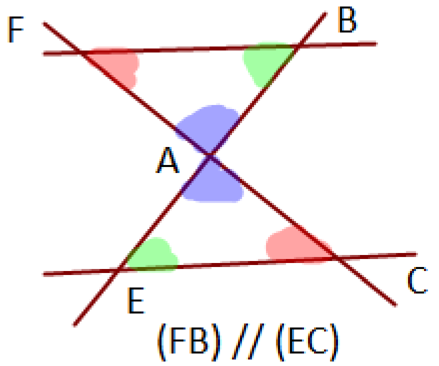
Remarque : On peut procéder de la même manière avec les angles $\widehat{AEF}$ et $\widehat{ABC}$:

Les angles $\widehat{AEF}$ et $\widehat{ABC}$ sont deux angles correspondants formés par les droites parallèles (EF) et (BC) coupées par la sécante (EB) alors ils sont égaux.

Exercice 8 :

On a :

- Les angles $\widehat{FAB}$ et $\widehat{EAC}$ sont opposés par le sommet alors ils sont égaux.
- Les angles $\widehat{FBA}$ et $\widehat{AEC}$ sont alternes-internes formés par les droites parallèles (FB) et (EC) coupées par la sécante (BE) alors ces angles sont égaux.



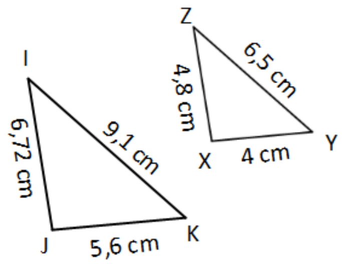
Les triangles AEC et ABF ont deux angles deux à deux de même mesure alors ils sont égaux.

Remarque : on peut utiliser les angles $\widehat{BFA}$ et $\widehat{ACE}$ comme étant deux angles alternes-internes égaux.

Exercice 9 :

On considère les triangles IJK et XYZ ci-contre. Les figures ne sont pas en vraies grandeurs.

Montrer que les triangles IJK et XYZ sont semblables.



Pour montrer que les triangles IJK et XYZ sont semblables, on vérifie que les longueurs des côtés censés être homologues sont bien proportionnelles. On peut représenter ces longueurs sous forme d'un tableau et on montre qu'il s'agit bien d'un tableau de proportionnalité.

XYZ	ZX	ZY	YX
IJK	IJ	IK	KJ

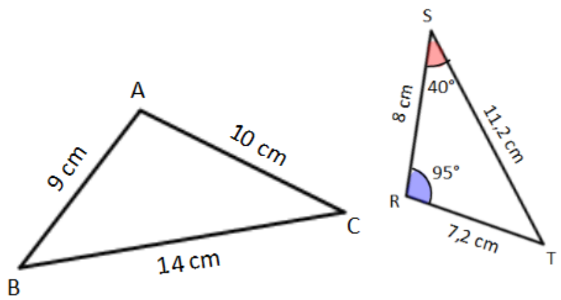
On calcule séparément les rapports des longueurs des côtés homologues :

$\frac{IJ}{ZX} = \frac{6{,}72\ cm}{4{,}8\ cm} = 1{,}4$ $\quad \frac{IK}{ZY} = \frac{9{,}1\ cm}{6{,}5\ cm} = 1{,}4$ $\quad \frac{KJ}{YX} = \frac{5{,}6\ cm}{4\ cm} = 1{,}4$

On a donc : $\frac{IJ}{ZX} = \frac{IK}{ZY} = \frac{KJ}{YX}$ alors les triangles IJK et XYZ sont semblables.

Exercice 10 : On considère les deux triangles ci-contre. Les figures ne sont pas en vraies grandeurs.

1) Montrer que les triangles ABC et RST sont semblables.

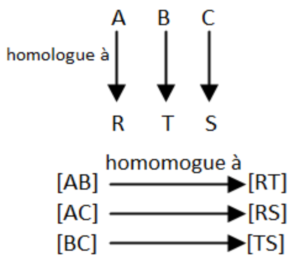


Si les triangles ABC et RST sont semblables, on aura :

A et R deux sommets homologues.

B et T deux sommets homologues
C et S deux sommets homologues

Pour vérifier si les triangles sont semblables, on calcule le rapport des longueurs des côtés censés être homologues.



$\frac{RT}{AB} = \frac{7,2\ cm}{9\ cm} = 0,8 \qquad \frac{RS}{AC} = \frac{8\ cm}{10\ cm} = 0,8 \qquad \frac{TS}{BC} = \frac{11,2\ cm}{14\ cm} = 0,8$

On a donc : $\frac{RT}{AB} = \frac{RS}{AC} = \frac{TS}{BC}$ Les rapports des longueurs sont égaux alors les deux triangles ABC et RST sont semblables.

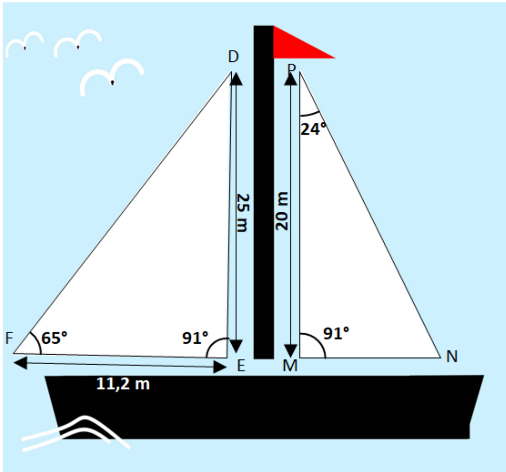
2) Les triangles ABC et RST sont semblables alors leurs angles sont deux à deux de même mesure.

On sait que la somme des mesures des angles dans un triangle est égale à 180° :

$$\widehat{RTS} = 180° - \left(\widehat{SRT} + \widehat{RST}\right) = 180° - (95° + 40°) = 45°$$

On a alors : $\widehat{\boldsymbol{ABC}} = \widehat{RTS} = 45°$, $\widehat{\boldsymbol{ACB}} = \widehat{RST} = 40°$, $\widehat{\boldsymbol{BAC}} = \widehat{TRS} = 95°$.

<u>Exercice 10 :</u> Sam est le propriétaire d'un voilier qui dispose deux voiles triangulaires.



1) Montrer que les triangles EDF et MNP sont semblables.

On sait que la somme des mesures des angles dans un triangle est égale à 180°.Pour montrer que EDF et MNP sont semblables, il suffit de montrer qu'ils ont deux angles deux à deux de même mesure.

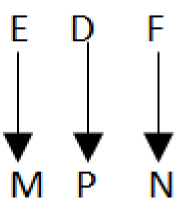
Dans le triangle EDF : $\widehat{FDE} = 180° - \left(\widehat{DFE} + \widehat{FED}\right) = 24°$.

On a donc : $\widehat{DEF} = \widehat{PMN}$ et $\widehat{FDE} = \widehat{MPN}$

Conclusion : EDF et MNP sont semblables.

1) Calculer la longueur MN.

On sait que les triangles EDF et MNP sont semblables alors les longueurs de leurs côtés homologues sont proportionnelles.



EDF	ED	EF	DF
MNP	MP	MN	PN

$\frac{MP}{ED} = \frac{MN}{EF}$ $alors\ MN = \frac{EF \times MP}{ED} = \frac{11,2\ m \times 20\ m}{25\ m} = 8,96\ m$

MN = 8,96 m.

1) a. Le périmètre du triangle MNP est égal à 63,7 m. Calculer NP.

$P_{MNP} = PM + MN + NP = 63,7\ m$

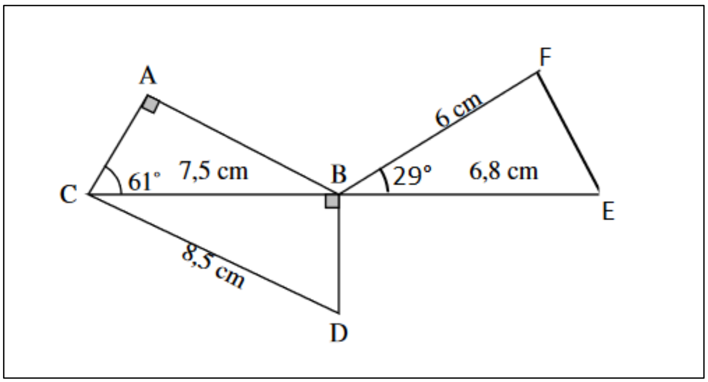
NP = 63,7 cm – (MN + PM) = 63,7 cm – (8,96 m + 20 m) = 34,74 m.

NP = 34,74 m.

b. En déduire DF.

On a $\frac{NP}{DF} = \frac{ED}{MP}$ alors $DF = \frac{NP \times MP}{ED} = \frac{34,74\ m \times 20m}{25\ m} = 27,7$

Exercice 11 : La figure ci-dessous n'est pas représentée en vraie grandeur. Les points C, B et E sont alignés. Le triangle ABC est rectangle en A. Le triangle BDC est rectangle en B.



1) Calculer BD.

Dans le triangle BCD rectangle en B, on applique le théorème de Pythagore :

CD² = BD² + BC² alors BD² = CD² - BC²
= 8,5² cm² - 7,5² cm²
= 72,25 cm² - 56,25 cm²
= 16 cm²

$$BD = \sqrt{16}\ cm = 4\ cm$$

2) Montrer que les triangles CBD et EBF sont semblables.

BCD	BD	BC	CD
EBF	FE	FB	BE

On calcule séparément :

$$\frac{FE}{BD} = \frac{3{,}2\ cm}{4\ cm} = 0{,}8 \quad \frac{FB}{BC} = \frac{6\ cm}{7{,}5\ cm} = 0{,}8 \quad \frac{BE}{CD} = \frac{6{,}8\ cm}{8{,}5\ cm} = 0{,}8$$

On a alors $\frac{FE}{BD} = \frac{FB}{BC} = \frac{BE}{CD}$ alors les triangles CBD et EBF sont semblables.

1) Montrer que les triangles ABC et BFE sont semblables.

Dans le triangle ABC : $\widehat{ABC} = 180° - \left(\widehat{BAC} + \widehat{ACB}\right) = 180° - (90° + 61°) = 29°$.

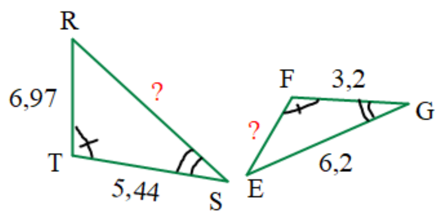
On a : Les triangles BCD et BEF sont semblables alors les angles homologues sont de même mesure. On a donc $\widehat{CBD} = \widehat{BFE} = 90°$.

Les deux triangles BAC et BEF sont deux triangles qui ont les angles $\widehat{CAB}\ égal$ à $\widehat{BFE}\ \ et\ \widehat{CBA}\ égal$ à $\widehat{FBE}$. Comme la somme des angles est égale à 180° alors ces deux triangles ont leurs angles deux à deux de même mesure alors ils sont égaux.

Exercice 13 : Les triangles EFG et RST sont semblables. Les longueurs sont en centimètre.

Calculer RS et EF.

On sait que les triangles EFG et RST sont semblables donc les longueurs des côtés homologues sont proportionnelles.



Triangle EFG	FG	EG	EF
Triangle RST	TS	SR	TR

$$\frac{TS}{FG} = \frac{RS}{EG} = \frac{TR}{EF}$$

$$\frac{5{,}44}{3{,}2} = \frac{RS}{6{,}2} = \frac{6{,}97}{EF} \quad donc\ RS = \frac{6{,}2 \times 5{,}44}{3{,}2} = 10{,}54$$

$$EF = \frac{6{,}97 \times 3{,}2}{5{,}44} = 4{,}1$$

On a alors RS = 10,54 cm et EF = 4,1 cm

Exercice 14 :

Les droites (OM) et (NL) sont sécantes en P. Les longueurs sont exprimées en centimètre.

1) Démontrer que les triangles POL et PMN sont semblables.

On a les angles $\widehat{NPM}$ et $\widehat{OPL}$ sont deux angles opposés par le sommet alors $\widehat{NPM} = \widehat{OPL}$.

On sait que $\widehat{LOP} = \widehat{PNM}$. Comme la somme des mesures des angles dans un triangle est égale à 180° , les angles $\widehat{NMP}$ et $\widehat{OLP}$ sont de même mesure.

Conclusion : les triangles MNP et POL ont leurs angles deux à deux de même mesure alors ils semblables.

2) Calculer NM.

On sait que les triangles MNP et OPL sont semblables alors les longueurs des côtés homologues sont proportionnelles.

Triangle PMN	PN	PM	MN
Triangle POL	PO	PL	OL

$$\frac{PO}{PN} = \frac{PL}{PM} = \frac{OL}{MN} = \frac{2,75}{2,2} = \frac{PL}{PM} = \frac{3,3}{MN}$$

$$\frac{2,75}{2,2} = \frac{3,3}{MN} \text{ alors } MN = \frac{2,2 \times 3,3}{2,75} = 2,64$$

MN = 2,64 cm