

Nombres rationnels

Multiplication et division

I- Multiplication

Produit de deux nombres rationnels

Définition

Le produit de deux nombres rationnels est un nombre rationnel dont le dénominateur est le produit des deux dénominateurs et de numérateur le produit des deux numérateurs

Autrement dit :

Soient a , b , c et d des entiers relatifs tels que $b \neq 0$ et $c \neq 0$

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{b \times d}$$

Exemples

$$\frac{3}{4} \times \frac{7}{2} = \frac{3 \times 7}{4 \times 2} = \frac{21}{8}$$

$$\frac{-5}{8} \times \frac{2}{9} = \frac{-10}{72}$$

Remarque : Pour faciliter les calculs, on peut utiliser les critères de divisibilité ou la décomposition en produits de facteurs premiers. On décompose alors les facteurs au numérateur et au dénominateur afin de simplifier avant de multiplier.

Exemples

$$\frac{-14}{25} \times \frac{75}{63} = -\frac{14 \times 75}{25 \times 21} = -\frac{\cancel{2} \times \cancel{7} \times \cancel{3} \times \cancel{5} \times \cancel{5}}{\cancel{5} \times \cancel{5} \times \cancel{3} \times 3 \times \cancel{7}} = -\frac{2}{3}$$

$$\frac{36}{-49} \times \frac{-35}{81} = \frac{36 \times 35}{49 \times 81} = \frac{\cancel{2} \times \cancel{2} \times \cancel{3} \times \cancel{3} \times 5 \times \cancel{7}}{\cancel{7} \times \cancel{7} \times \cancel{3} \times \cancel{3} \times 3 \times 3} = \frac{20}{63}$$

Propriété 1

Soient a , b deux nombres entiers relatifs ($b \neq 0$) et k un nombre décimal relatif.

$$k \times \frac{a}{b} = \frac{k \times a}{b}$$

Exemples :

$$-12 \times \frac{45}{18} = -\frac{12 \times 45}{18} = -\frac{\cancel{6} \times 2 \times \cancel{3} \times 15}{\cancel{3} \times \cancel{6}} = -30$$

$$\frac{27}{14} \times 21 = \frac{27 \times 21}{14} = \frac{27 \times \cancel{3} \times \cancel{7}}{2 \times \cancel{7}} = \frac{81}{2}$$

Propriété 2

Pour calculer une fraction d'un nombre ou (une quantité), on multiplie la fraction par ce nombre ou (par cette quantité).

Exemple 1

Paul possède 50 € dans sa tirelire. Il a donné $\frac{2}{5}$ de cet argent à son petit frère. Quelle somme Paul a-t-il donné son frère ?

$$\text{On calcule } \frac{2}{5} \text{ de } 50 \text{ € : } \frac{2}{5} \times 50 = \frac{2 \times 50}{5} = 20$$

Paul a donné 20 € à son frère.

Exemple 2

Ali a mangé $\frac{2}{7}$ de $\frac{3}{5}$ d'une baguette de pain. Quelle fraction de la baguette a-t-il mangé ?

$$\text{On calcule } \frac{2}{7} \text{ de } \frac{3}{5} \text{ d'une baguette de pain : } \frac{2}{7} \times \frac{3}{5} = \frac{2 \times 3}{7 \times 5} = \frac{6}{35}$$

Ali a mangé $\frac{6}{35}$ de la baguette de pain.

II- Division

1) Inverse d'un nombre

Définition

Deux nombres sont **inverses** l'un de l'autre si leur produit est égal à 1.

Exemples

4 et 0,25 sont inverses car $4 \times 0,25 = 1$.

-2 et -0,5 sont inverses car $-2 \times (-0,5) = 1$.

Propriétés

Soient a et b deux entiers relatifs non nuls.

➤ L'inverse du nombre a est le nombre $\frac{1}{a}$.

➤ L'inverse du nombre $\frac{a}{b}$ est le nombre $\frac{b}{a}$. $\left(\frac{1}{\frac{a}{b}}\right) = \frac{b}{a}$

Exemples

L'inverse de -3 est $\frac{1}{-3} = -\frac{1}{3}$.

L'inverse de $\frac{3}{5}$ est $\frac{5}{3}$.

Remarque : Il ne faut pas confondre l'inverse d'un nombre avec l'opposé d'un nombre. En effet :

➤ Deux nombres opposés sont de signes contraires et leur somme est égale à zéro.

Exemple : -4 est l'opposé de 4. $-4 + 4 = 0$.

➤ Deux nombres inverses sont de même signe et leur produit est égal à 1.

Exemple : -4 est l'inverse de $-\frac{1}{4}$. $-4 \times \left(-\frac{1}{4}\right) = 1$.

2) Quotient de deux nombres rationnels

Définitions

Soient a , b , c et d des entiers relatifs tels que $(b \neq 0)$, $(c \neq 0)$ et $(d \neq 0)$.

- Le quotient de a par b est égal au produit de a par l'inverse de b .

$$a \div b = a \times \frac{1}{b} = \frac{a}{b}$$

- Le quotient de $\frac{a}{b}$ par $\frac{c}{d}$ est égal au produit de $\frac{a}{b}$ par l'inverse de $\frac{c}{d}$.

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c}$$

Exemples

$$20 \div 0,25 = 20 \div \frac{1}{4} = 20 \times \frac{4}{1} = 80$$

$$-\frac{6}{5} \div 7 = -\frac{6}{5} \times \frac{1}{7} = \frac{-6 \times 1}{5 \times 7} = -\frac{6}{35}$$

$$\frac{4}{3} \div \frac{7}{11} = \frac{4}{3} \times \frac{11}{7} = \frac{44}{21}$$